

OPCIÓN A

1.- Sea la función $f(x) = e^{x^2+ax+b}$

a) Calcular a y b para que $f(x)$ tenga un extremo en el punto $(1, 1)$. (1,5 puntos)

b) Calcular los extremos de la función $f(x)$ cuando $a = 0$ y $b = 0$. (1 punto)

a)

$$f'(x) = (2x+a)e^{x^2+ax+b} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = e^{1^2+a+1+b} = 1 \Rightarrow e^{a+b+1} = 1 \Rightarrow \ln e^{a+b+1} = \ln 1 \Rightarrow (a+b+1) \ln e = 0 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow (2 \cdot 1 + a)e^{1^2+a+1+b} = 0 \Rightarrow 2+a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b+1) \cdot 1 = 0 \Rightarrow a+b+1 = 0 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow -2+b+1 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(x) = e^{x^2-2x+1}$$

b)

$$f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{x^2} \Rightarrow \text{Creciente} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 2xe^{x^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \\ x > 0 \\ e^{x^2} > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

$2 > 0$	(+)	(+)
$x > 0$	(-)	(+)
$e^{x^2} > 0$	(+)	(+)
Solución	(-)	(+)

Creciente $\forall x \in \mathfrak{R} / x > 0$

Decreciente $\forall x \in \mathfrak{R} / x < 0$

Mínimo relativo $x = 0 \Rightarrow f(0) = e^{0^2} = e^0 = 1$ de decreciente pasa a creciente

2.- Calcular las integrales indefinidas siguientes:

a) $\int \frac{5 dx}{(3x-1)^2}$ (0,75 puntos)

b) $\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (1 punto)

c) $\int \frac{(x+1)^3}{2x} dx$ (0,75 puntos)

a)

$$\int \frac{5 dx}{(3x-1)^2} = 5 \int \frac{\frac{dt}{3}}{t^2} = \frac{5}{3} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{5}{3} \int t^{-2} dt = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{-2+1} \cdot t^{-2+1} = -\frac{5}{3} \cdot t^{-1} = -\frac{5}{3t} = -\frac{5}{3(3x-1)} + K$$

$$3x-1 = t \Rightarrow 3 dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

Continuación del Problema 2 de la opción A

b)

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-t}{t} dt + 4 \cdot \arcsen x = -\int dt + 4 \cdot \arcsen x$$

$$1-x^2 = t^2 \Rightarrow -2x dx = 2t dt \Rightarrow x dx = -t dt$$

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}} dx = -t + 4 \cdot \arcsen x = -\sqrt{1-x^2} + 4 \cdot \arcsen x + K$$

c)

$$\int \frac{(x+1)^3}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x} dx = \frac{1}{2} \int x^2 dx + \frac{3}{2} \int x dx + \frac{3}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{(x+1)^3}{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \ln x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + 3 \cdot x + \ln x \right) + K$$

3.- Estudiar el sistema siguiente para los distintos valores del parámetro **m**. Resolverlo cuando $m = 3$.

$$\begin{cases} mx - y + 13z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \quad \text{(2,5 puntos)} \\ 2x - my + 4z = 0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo con soluciones compatibles, determinar m cuando el determinante de la matriz de los coeficientes no es nulo, siendo m determinado cuando es nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -m & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & -1 & 13 \\ m+1 & 0 & 20 \\ 2-m^2 & 0 & 4-13m \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} m+1 & 20 \\ 2-m^2 & 4-13m \end{vmatrix} = (m+1)(4-13m) - 40 + 20m^2$$

$$|A| = 4m - 13m^2 + 4 - 13m - 40 + 20m^2 = 7m^2 - 9m - 36 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 7m^2 - 9m - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-36) = 81 + 1008 = 1089 \geq 0 \Rightarrow m = \frac{9 \pm \sqrt{1089}}{2 \cdot 7} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{9+33}{14} = \frac{42}{14} = 3 \\ m = \frac{9-33}{14} = \frac{-24}{14} = -\frac{12}{7} \end{cases}$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{12}{7}, 3 \right\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Solución trivial $\Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$

Continuación del Problema 3 de la opción A

Para $m = -\frac{12}{7} \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sist. Compatible Indeter min ado}$

Para $m = 3 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sist. Compatible Indeter min ado}$

Cuando $m = 3 \Rightarrow \text{Compatible Indeter min ado (el unico con soluciones)}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 13 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sist. Compatible Indeter min ado} \Rightarrow$

$$y + 2z = 0 \Rightarrow y = -2z \Rightarrow x - 2z + 7z = 0 \Rightarrow x = -5z \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (-5\lambda, -2\lambda, \lambda)$$

4.- Sea P el punto de coordenadas $P(1, 0, 1)$ y r la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$.

a) Hallar la ecuación en forma continua de una recta que pase por el punto P y sea paralela a la recta r. (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación general de un plano que pase por el punto P y contenga a la recta r. (1,25 puntos)

a) La recta pedida s tiene el mismo vector director que la recta r

$$x = 1 + 2z \Rightarrow 1 + 2z + y - z = 0 \Rightarrow y = -1 - z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = \vec{v}_r = (2, -1, 1) \Rightarrow$$

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = z - 1$$

b) El plano π queda definido por el vector director de la recta r, por el vector **PR**, siendo **R** un punto cualquiera de dicha recta (tomaremos el indicado en su ecuación) y por el vector **PG**, siendo **G** el punto genérico o generador del plano. Los tres vectores son coplanarios y su producto mixto, que daría como resultado el volumen del paralelepípedo que formarían, es nulo y la ecuación pedida del plano.

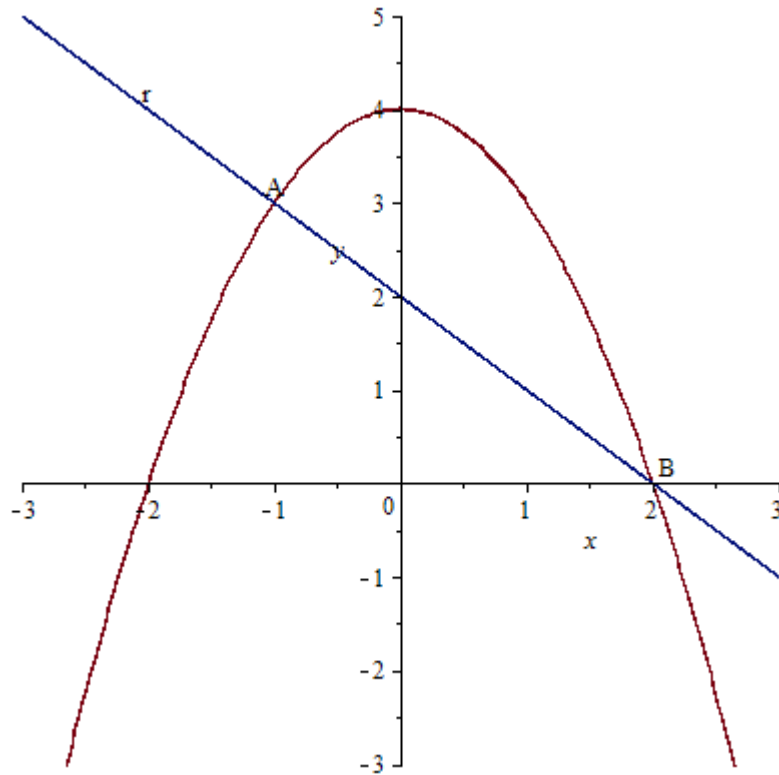
$$\text{Siendo } R(1, -1, 0) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (2, -1, 1) \\ \vec{PR} = (1, -1, 0) - (1, 0, 1) = (0, -1, -1) \equiv (0, 1, 1) \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (1, 0, 1) = (x-1, y, z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-(x-1) + 2(z-1) - (x-1) - 2y = 0 \Rightarrow -2(x-1) - 2y + 2(z-1) = 0 \Rightarrow x - 1 + y - z + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x + y - z = 0$$

OPCIÓN B

1.- En la figura siguiente se muestran la parábola de ecuación $f(x) = 4 - x^2$ y la recta r que pasa por los puntos **A** y **B** de la parábola de abscisas respectivas -1 y 2 . Hallar la ecuación de una recta s tangente a la parábola $f(x)$ y paralela a r . (2,5 puntos)



La recta r pasa, asimismo, por los puntos $(0, 2)$, $(2, 0)$ y $(-1, 4 - (-1)^2) = (-1, 3)$

$$\text{Pendiente de } r \Rightarrow m = \frac{0-2}{2-0} = -1 \Rightarrow f'(x) = -2x \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}$$

$$y - \frac{15}{4} = (-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 4y - 15 = -4x + 2 \Rightarrow s \equiv 4x + 4y - 17 = 0$$

2.- Calcular el área de la región plana limitada por la curva $y = x(x-2)(x-3)$ y la recta de ecuación $y = 0$. (2,5 puntos)

La recta $y = 0$ es el eje OX

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$0 < 1 < 2 \Rightarrow y(1) = 1(1-2)(1-3) = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 2 > 0$$

$$2 < \frac{5}{2} < 3 \Rightarrow y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-2\right)\left(\frac{5}{2}-3\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8} < 0$$

Continuación del Problema

$$y = x(x^2 - 5x + 6) = x^3 - 5x^2 + 6x$$

$$A = \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x) dx + \left| \int_2^3 (x^3 - 5x^2 + 6x) dx \right| = \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x) dx - \int_2^3 (x^3 - 5x^2 + 6x) dx$$

$$A = \frac{1}{4} [x^4]_0^2 - 5 \cdot \frac{1}{3} [x^3]_0^2 + 6 \cdot \frac{1}{2} [x^2]_0^2 - \frac{1}{4} [x^4]_2^3 + 5 \cdot \frac{1}{3} [x^3]_2^3 - 6 \cdot \frac{1}{2} [x^2]_2^3 =$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot (2^4 - 0^4) - \frac{5}{3} (2^3 - 0^3) + 3 \cdot (2^2 - 0^2) - \frac{1}{4} \cdot (3^4 - 2^4) + \frac{5}{3} (3^3 - 2^3) - 3 \cdot (3^2 - 2^2)$$

$$A = \frac{16}{4} - \frac{40}{3} + 12 - \frac{81-16}{4} + \frac{5 \cdot (27-8)}{3} - 3 \cdot (9-4) = 16 - \frac{40}{3} - \frac{65}{4} + \frac{95}{3} - 15 = 1 + \frac{55}{3} - \frac{65}{4}$$

$$A = \frac{12 + 220 - 195}{12} = \frac{37}{12}$$

3.- Determinar los valores de los parámetros **a** y **b** para los que tiene inversa la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ a & a+b \end{pmatrix} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

Calcular la matriz A^{-1} cuando **a = 3** y **b = 1**. (1 punto)

Una matriz tiene inversa cuando su determinante no es nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b & 4b \\ a & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a-b = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow \forall a, b \in \mathfrak{R} \Rightarrow a = b \Rightarrow \text{No existe } A^{-1}$$

$$\forall a, b \in \mathfrak{R} \Rightarrow a \neq b \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$|A| = (3-1)^2 = 2^2 = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A^t \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

4.- Determinar la posición relativa de los siguientes planos:

$$\beta_1 \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda - 2\mu \\ y = 4 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda - 5\mu \end{cases} \quad \beta_2 \equiv x + y + z = 2 \quad \beta_3 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2,5 \text{ puntos})$$

$$\beta_1 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 3 & -2 \\ y-4 & 1 & 0 \\ z+2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -5(x+1) - 4(y-4) + 2(z+2) + 15(y-4) = 0 \Rightarrow$$

$$-5(x+1) + 11(y-4) + 2(z+2) = 0 \Rightarrow \beta_1 \equiv 5x - 11y - 2z + 45 = 0$$

$$\beta_3 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x-2) + 2(y+1) + 3z - 4z - 3(x-2) - (y+1) = 0 \Rightarrow$$

$$-(x-2) + (y+1) - z = 0 \Rightarrow \beta_3 \equiv x - y + z - 3 = 0$$

Si el sistema que forman los tres planos es Compatible Determinado, se cortan en un punto, si el sistema es Compatible Indeterminado se cortarían según una recta que va desde que sea la misma hasta que se corten en tres rectas paralelas, y si es Incompatible habrá planos paralelos, estudiaremos cada caso según sea el sistema.

$$\begin{cases} \beta_1 \equiv 5x - 11y - 2z = -45 \\ \beta_2 \equiv x + y + z = 2 \\ \beta_3 \equiv x - y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 5 & -11 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -13 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -13 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \Rightarrow$$

Sistema Compatible Determinado \Rightarrow Los tres planos se cortan en un punto

Continuación del problema 4 de la opción B

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -11 & -2 & -45 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -13 & 0 & -39 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow 7x - 13 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -39 \Rightarrow$$

$$7x = -39 - \frac{13}{2} = \frac{-78 - 13}{2} = -\frac{91}{2} \Rightarrow x = -\frac{91}{14} \Rightarrow -\frac{91}{14} + \frac{1}{2} + z = 3 \Rightarrow z = 3 + \frac{91}{14} - \frac{1}{2} = \frac{42 + 91 - 7}{14} = \frac{126}{14}$$

$$\text{Punto} \Rightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{91}{14}, -\frac{1}{2}, \frac{63}{7}\right)$$